

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

УДК 539.3

**КОРРЕКТНЫЙ РАСЧЕТ ПРИВЕДЕННЫХ МАСС ПРИ УДАРЕ**

*А.И.Русаков*

Рассмотрим следующую одномерную задачу расчета конструкции на ударную нагрузку.

Точечная масса  $M$ , двигаясь по вертикальной оси  $Oz$ , падает на конструкцию, находящуюся в равновесии, и соударяется с ней при скорости  $v_1$  в точке с координатой  $z_1$ . После соударения происходит «слипание масс», то есть дальнейшее движение ударяющего тела и объекта удара происходит как единое целое до остановки ударяющего тела. Состояние конструкции задается обобщенной координатой точки соударения  $z$ , причем:

1. Суммарная потенциальная энергия деформации объекта удара определяется выражением:

$$U_d = \frac{c}{2}(z - z_0)^2.$$

2. Кинетическая энергия  $T_k$  конструкции определяется *приведенной массой объекта удара по кинетической энергии, или первой приведенной массой  $m_T$* :

$$T_k = \frac{m_T \dot{z}^2}{2}.$$

3. Импульс  $p$  и потенциальная энергия  $U_{кт}$  объекта удара в поле тяготения определяются *приведенной массой по импульсу, или второй приведенной массой  $m_p$* :

$$p = m_p \dot{z}; \quad U_{кт} = -m_p gz. \quad (1)$$

Предполагается, что опасные напряжения при ударе возникают в конструкции при максимальном перемещении точки соударения в направлении удара. Требуется установить опасные напряжения в конструкции.

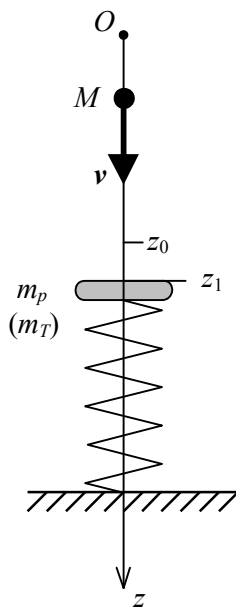


Рис.1

Предложенной расчетной модели конструкции соответствует следующая механическая модель: ударную нагрузку воспринимает платформа конечной массы, установленная на пружине жесткости  $c$ , причем точка  $z_0$  соответствует ненагруженной пружине (Рис.1). Масса платформы при расчете кинетической энергии берется равной  $m_T$ , при расчете импульса и потенциальной энергии полагается равной  $m_p$ ; масса пружины полагается равной нулю. Достаточно очевидно, что данная механическая модель адекватна с точки зрения расчета энергии системы. Эта модель объясняет смысл термина «приведенная масса»: масса всей конструкции «приводится» к точке соударения (платформе).

Отличие предложенной постановки задачи расчета на удар от известной задачи расчета конструкции с одной степенью свободы состоит в корректном расчете импульса и потенциальной энергии конструкции; если в обычной постановке предполагается, что приведенной массы по кинетической энергии  $m_T$  достаточно, чтобы определить динамику конструкции [1, 2], то в предлагаемой расчетной модели учитывается, что импульс и потенциальную энергию конструкции в поле тяжести нельзя рассчитывать с помощью той же приведенной массы, что и кинетическую энергию.

Из предложенной механической модели следует, в частности, что в отсутствии сил тяжести просадка конструкции вследствие собственного веса определяется условием

$$c(z_1 - z_0) = m_p g; \quad (2)$$

просадка конструкции, вызванная статическим действием груза массы  $M$ , определяется условием

$$c\Delta z_{ст} = Mg. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta z_{ст} = z_{ст} - z_1$  ( $z_{ст}$  — координата точки действия груза).

Формулы (2) — (3) могут быть получены строго из принципа минимума полной потенциальной энергии рассматриваемой системы.

Предложенная задача решается с помощью коэффициента динамичности, который вводят как отношение

$$k_d = \frac{\Delta z_d}{\Delta z_{ст}}, \quad (4)$$

где  $\Delta z_d = z_2 - z_1$  — перемещение системы до остановки. Данный коэффициент позволяет определять напряжения при ударе применением формулы:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{ст}$  — составляющая напряжения, вызванная статической нагрузкой без учета собственного веса конструкции. Действительно, будем считать, что при расчете напряжений действие динамической и статической нагрузок эквивалентно, то есть перемещение  $\Delta z_d$  можно считать результатом некоторой статической нагрузки в точке удара. Тогда в формуле (4) присутствуют составляющие перемещений только вследствие нагрузки в этой точке (динамической и статической, соответственно). В силу принципа независимого действия сил эти перемещения пропорциональны напряжениям без учета собственного веса конструкции. В результате в левой части (5) получаем составляющую напряжения при ударе без учета собственного веса конструкции. Но эта составляющая в задачах на ударную нагрузку, как правило, на порядки превосходит напряжения от собственного веса. Таким образом, формула (5), как правило, обладает достаточной для практики точностью.

Подчеркнем важность сделанного замечания: если в формуле (5) напряжение  $\sigma_{ст}$  брать с учетом собственного веса конструкции, то полученное напряжение при ударе  $\sigma_d$  может оказаться недопустимо завышенным.

Скорость  $v'_1$  совместного движения груза и конструкции в момент после удара определяется из закона сохранения импульса:

$$v'_1 = \frac{M}{M + m_p} v_1. \quad (6)$$

Можно убедиться, что изменению скорости движения груза и конструкции согласно выражению (6) соответствует скачкообразное уменьшение кинетической энергии системы, что объясняется тепловыделением при ударе.

Обозначим  $U_1$  и  $U_2$  — потенциальную энергию системы, соответственно, в момент удара и в момент остановки после удара. Закон сохранения энергии представим в виде:

$$U_2 - U_1 = \frac{(M + m_T)v_1'^2}{2}. \quad (7)$$

Изменение потенциальной энергии деформации конструкции при перемещении системы до остановки легко получить, полагая  $z_0 = 0$ . С учетом (2) имеем:

$$\Delta U_d = \frac{c}{2} z_2^2 - \frac{c}{2} z_1^2 = \frac{c}{2} \Delta z_d^2 + \Delta z_d m_p g.$$

Потенциальная энергия системы в поле тяжести также меняется. Изменение этой энергии при перемещении на  $\Delta z_d$  составит

$$\Delta U_T = -(M + m_p)g\Delta z_d.$$

В результате равенство (7) представляется в виде:

$$\frac{c}{2} \Delta z_d^2 + \Delta z_d m_p g - (M + m_p)g\Delta z_d = \frac{(M + m_T)v_1'^2}{2}.$$

Этим определяется уравнение для перемещения конструкции при ударе  $\Delta z_d$ :

$$\Delta z_d^2 - \frac{2Mg}{c} \Delta z_d - \frac{(M + m_T)v_1'^2}{c} = 0, \quad (8)$$

которое имеет решение:

$$\Delta z_d = \frac{Mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{c}\right)^2 + \frac{M + m_T}{c} \frac{M^2}{(M + m_p)^2} v_1'^2}. \quad (9)$$

Заметим, что второе решение уравнения (8) даст отрицательное значение перемещения, что соответствует обратному ходу конструкции и здесь не рассматривается.

Полученное решение удобно представить с учетом (3) как связь перемещения при ударе и просадки при статической нагрузке:

$$\Delta z_d = \Delta z_{ст} + \sqrt{\Delta z_{ст}^2 + \Delta z_{ст} \frac{(M + m_T)M}{(M + m_p)^2} \frac{v_1^2}{g}}.$$

Отсюда устанавливаем коэффициент динамичности:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{1 + m_T/M}{\left(1 + m_p/M\right)^2} \frac{v_1^2}{\Delta z_{ст} g}}. \quad (10)$$

Обычно в рассматриваемой задаче скорость  $v_1$  в момент соударения определяется через высоту падения  $h$  массы  $M$  на конструкцию, и в формуле (10) удобно сделать замену:

$$\frac{v_1^2}{\Delta z_{ст} g} = \frac{2h}{\Delta z_{ст}}. \quad (11)$$

Однако часто встречаются задачи, в которых на взаимодействие тел при ударе не влияет сила тяжести. В этом случае расчет ударного действия нагрузки следует выполнять с помощью формулы (9), в которой полагать  $g = 0$ .

В известной расчетной модели конструкции с одной степенью свободы не учитывается различие первой и второй приведенных масс, что приводит к следующему выражению для коэффициента динамичности [1]:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{1 + m_T/M} \frac{v_1^2}{\Delta z_{ст} g}}. \quad (12)$$

При расчетах приведенных масс различных конструкций вводят допущения: 1) перемещения точки тела в любой момент действия динамической нагрузки такие же, как при некоторой статической нагрузке; 2) перемещения определяются только ударной нагрузкой, без учета собственного веса конструкции.

В случае удара по торцу вертикального стержня (Рис.2) эти допущения позволяют выразить приведенные массы конструкции через ее истинную массу  $m$ :

$$m_T = \frac{m}{3}; \quad m_p = \frac{m}{2}. \quad (13)$$

Первое соотношение известно [2]; второе соотношение получено решением уравнения для приведенной массы по импульсу:

$$m_p \dot{w}_l = \int_0^l \dot{w}_s \frac{m}{l} ds, \quad (14)$$

где  $w_s$  — перемещение сечения стержня с координатой  $s$  по вертикали вниз.

В случае удара по концу консольной балки и прямом изгибе (Рис.3) допущения расчета

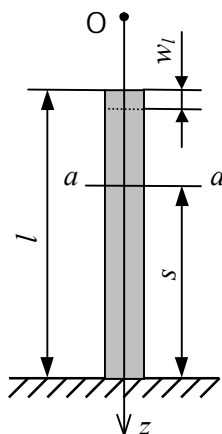


Рис.2. Объект удара — вертикальный стержень:  
 $a-a$  — произвольное поперечное сечение;  
 $w_l$  — перемещение верхнего торца стержня вследствие деформирования

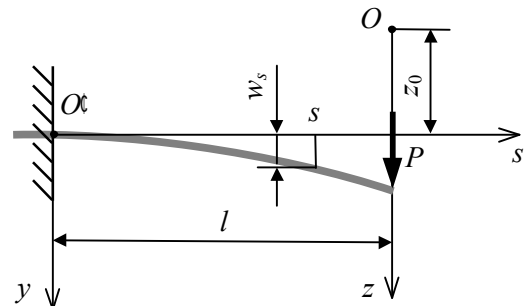


Рис.3. Объект удара — консольная балка:  
 $O\alpha yz$  — связанная с балкой СК;  
 $Oz$  — ось отсчета обобщенной координаты;  
 $P$  — ударная нагрузка

приведенных масс позволяют получить:

$$m_T = \frac{33}{140}m; \quad m_p = \frac{3}{8}m. \quad (15)$$

Первое соотношение известно [1]; второе соотношение получено решением уравнения (14), где  $w_s$  обозначает прогиб.

В обоих случаях легко проверяется справедливость выражения (1) для потенциальной энергии  $U_{\text{кт}}$ .

Выражения (13) и (15) говорят о значительном различии приведенных масс при ударе, то есть в случае, когда конструкция существенно тяжелее объекта удара, расчет коэффициента динамичности по общепринятой формуле (12) даст значительную погрешность, и следует пользоваться уточненной формулой (10).

Справедливость формулы (10) проверена экспериментально на установке для исследования прогибов консольной балки при ударной нагрузке. Расчетная схема действия ударной нагрузки показана на рис.3. Балка установки изготовлена из углеродистой стали, имеет массу  $m = 691$  г, длину  $l = 73,5$  см и прямоугольное поперечное сечение с моментом инерции  $J_x = 0,025$  см<sup>4</sup>. Ударяющее тело представляет собой стальной цилиндр массой  $M = 100$  г, поверхность удара — основание цилиндра, высота падения  $h = 15$  см. Опытное значение коэффициента динамичности получено по формуле (4), причем прогиб при статическом действии нагрузки устанавливался по методу начальных параметров:  $\Delta z_{\text{ст}} = 0,26$  см. Опытный коэффициент динамичности оказался равен 6,53. Теоретический коэффициент динамичности, полученный по уточненной формуле (10) с подстановкой (11), оказался равен 5,95, что дало расхождение с опытными значением 9%. Теоретический коэффициент динамичности, полученный «в грубом приближении» (12), оказался равен 7,70, что дало расхождение с опытными значением 18%. Таким образом, предложенная теория удара для объекта с одной степенью свободы дает лучшее согласие с опытом, чем общепринятая.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 2000.
2. Филоненко-Бородич М.М., Изюмов С.М., Олисов В.А., Кудрявцев И.Н., Мальгинов Л.И. Курс сопротивления материалов. Ч.1. М.: Гос. издат. технико-теоретич. литературы, 1955.